

УДК 517.968, 517.983.37, 517.958:535.4

Д. В. Валовик, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА СИСТЕМЕ НЕПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ТЕЛ И ЭКРАНОВ¹

Аннотация.

Актуальность и цели. Теоретическое исследование векторной задачи рассеяния электромагнитной волны препятствием сложной формы, состоящим из нескольких объемных тел и бесконечно тонких абсолютно проводящих экранов.

Материалы и методы. Задача рассматривается в квазиклассической постановке (решение разыскивается в классическом смысле всюду, за исключением края экранов); для доказательства теоремы единственности решения краевой задачи применяются классические интегральные формулы анализа, распространяемые на пространства функций Соболева; для доказательства существования и гладкости решения задачи применяются элементы теории эллиптических псевдодифференциальных операторов на многообразиях с краем.

Результаты. Сформулирована квазиклассическая постановка задачи дифракции; доказана теорема о единственности квазиклассического решения скалярной задачи дифракции; доказана теорема о фредгольмовости системы интегродифференциальных уравнений; установлена гладкость решения этой системы.

Выводы. Полученные результаты могут быть использованы для исследования более сложных задач электродинамики, а также для теоретического обоснования численных методов их решения.

Ключевые слова: задача дифракции, квазиклассические решения, теорема единственности, пространства Соболева, фредгольмов оператор, эллиптический псевдодифференциальный оператор.

D. V. Valovik, M. Yu. Medvedik, Yu. G. Smirnov, A. A. Tsupak

EXISTENCE AND UNICITY OF THE SOLUTION OF THE DIFFRACTION PROBLEM FOR AN ELECTROMAGNETIC WAVE ON A SYSTEM OF NON-INTERSECTING BODIES AND SCREENS

Abstract.

Background. The aim of this work is to theoretically study the vector problem of electromagnetic wave scattering by an obstacle of complex shape consisting of several solid bodies and infinitely thin absolutely conducting screens.

Material and methods. The problem is considered in the quasiclassical statement (solution is sought in the classical sense everywhere except for the screen edge); to prove the theorem of uniqueness of the solution to the boundary value problem, the authors used classical integral formulas generalized for the elements of the Sobolev spaces; to prove existence and continuity of the solution, the researchers applied the theory of elliptic pseudodifferential operators over bounded manifolds.

Results. The quasiclassical statement of the electromagnetic wave diffraction problem has been suggested; the theorem of uniqueness of the quasi-classical solu-

¹ Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект №14-11-00344.

tion to the boundary value problem was proved; the Fredholm property of the matrix integro-differential operator was established; the theorem on continuity of solutions to the integro-differential equations was proved.

Conclusions. The obtained results can be used in the study of more complicated diffraction problems as well as for validation of numerical methods for their approximate solution.

Key words: diffraction problem, quasi-classical solutions, uniqueness theorem, Sobolev spaces, Fredholm operator, elliptic PsDO

Введение

В статье [1] впервые рассмотрен новый класс задач дифракции электромагнитных волн, в которых рассеивающая структура образована многообразиями различной размерности – задача рассматривается в квазиклассической постановке (решение разыскивается в классическом смысле всюду, за исключением края экранов); исходная краевая задача для системы уравнений Максвелла сводится методами теории потенциала к системе интегродифференциальных уравнений по областям и поверхностям рассеивателей. Для приближенного решения системы уравнений в [1] применен метод Галеркина с выбором кусочно-линейных финитных базисных вектор-функций.

Данная работа посвящена теоретическому исследованию описанной задачи. Во-первых, доказывается теорема единственности квазиклассического решения поставленной задачи дифракции. Доказательство этой теоремы во многом напоминает доказательство аналогичного утверждения для решения скалярной задачи дифракции [2]: исходная краевая задача сводится к задаче сопряжения в нескольких подобластях свободного пространства; из классических интегральных соотношений и условий излучения следует, что решение задачи сопряжения (а следовательно, и исходной задачи) единственно.

Исходная краевая задача сводится методами теории потенциала [3, 4] к системе интегродифференциальных уравнений [1]. Из известных результатов о поведении поля вблизи края абсолютно проводящего экрана следует необходимость рассматривать полученные уравнения как псевдодифференциальные в пространствах Соболева сечений векторных расслоений. В работе определены пространства решений системы интегродифференциальных уравнений; показано, что решение ее является гладким во внутренних точках рассеивателей; кроме того, установлена фредгольмовость матричного интегродифференциального оператора рассматриваемой задачи дифракции.

1. Постановка задачи дифракции

Сформулируем кратко математическую постановку задачи дифракции для случая рассеивателя, состоящего из одного тела и одного экрана – более общий случай нескольких экранов и тел рассмотрен в [1].

Пусть Ω – связная ориентируемая незамкнутая ограниченная поверхность класса C^∞ в $\mathbb{R}^3$, являющаяся абсолютно проводящей, с кусочно-гладким краем; $\partial\Omega_\delta := \{x \in \mathbb{R}^3 : \text{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}$ – трубчатые окрестности края экрана. Пусть Q – ограниченная область с кусочно-гладкой (класса C^1) границей, причем $\overline{Q} \cap \overline{\Omega} = \emptyset$. Тело Q – диэлектрически неоднородное и анизотропное с гладкой тензор-функцией $\hat{\epsilon}(x)$ такой, что

$\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^T$ и $\operatorname{Re} \hat{\varepsilon} > 0$, $\operatorname{Im} \hat{\varepsilon} \geq 0$ в $\bar{Q}$. Свободное пространство однородно и изотропно с постоянными ε_e, μ_e , причем $\operatorname{Im} \varepsilon_e \geq 0$, $\operatorname{Im} \mu_e \geq 0$, $\operatorname{Im} k_e \geq 0$, $k_e = \omega \sqrt{\varepsilon_e \mu_e}$.

Ниже P^+ , P^- – произвольные области, внешняя и внутренняя соответственно к Ω и такие, что $\Omega \subset \partial P^\pm$, а $\mathbf{j}_{0,E}$ – ток, локализованный вне рассеивателей: $\operatorname{supp}(\mathbf{j}_{0,E}) \cap (\bar{\Omega} \cup \bar{Q}) = \emptyset$.

Требуется определить полное электромагнитное поле $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$:

$$(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in C^2\left((\partial Q \cup \bar{\Omega})^c\right) \cap C^1\left(\bar{Q}^c \setminus \bar{\Omega}\right) \cap \bigcap_{\delta > 0} C^1(\bar{Q}) \cap C(\bar{P}^+ \setminus \partial \Omega_\delta) \cap C(\bar{P}^- \setminus \partial \Omega_\delta), \quad (1)$$

удовлетворяющее в $\mathbb{R}^3 \setminus (\partial Q \cup \bar{\Omega})$:

– уравнениям Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega \hat{\varepsilon} \mathbf{E} + \mathbf{j}_{0,E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mathbf{H}, \end{cases} \quad (2)$$

– условиям непрерывности касательных компонент на границе области неоднородности:

$$[\mathbf{E}_\tau]_{\partial Q} = [\mathbf{H}_\tau]_{\partial Q} = 0, \quad (3)$$

– краевому условию на поверхности экрана Ω (за исключением точек его края):

$$\mathbf{E}_\tau|_\Omega = 0, \quad (4)$$

– условиям конечности энергии в любом ограниченном объеме пространства:

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^3) \quad (5)$$

– условиям излучения Зоммерфельда на бесконечности для рассеянного поля

$$\frac{\partial(\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s)}{\partial r} - ik_e(\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s) = o(1/r), \quad r \rightarrow \infty, \quad (6)$$

где $r = |\mathbf{x}|$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

Определение 1. Решение $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ задачи (2)–(6), удовлетворяющее условиям (1), называется квазиклассическим.

Теорема. Неоднородная задача (2)–(6) имеет не более одного решения.

Доказательство. В силу линейности задачи достаточно установить, что однородная краевая задача для рассеянного поля $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$ может иметь лишь тривиальное решение.

Эта краевая задача формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}_s = -i\omega\hat{\epsilon}\mathbf{E}_s, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_s = i\omega\mu_e\mathbf{H}_s, \end{cases} \quad [\mathbf{E}_{s,\tau}]|_{\partial Q} = [\mathbf{H}_{s,\tau}]|_{\partial Q} = 0, \quad \mathbf{E}_{s,\tau}|_{\Omega} = 0,$$

Также для $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$ предполагаются выполненными условия излучения.

Дополним экран Ω до произвольной кусочно-гладкой односвязной замкнутой ориентируемой поверхности ∂V_1 , охватывающей ограниченную область $V_1 \subset \mathbb{R}^3$ и такой, что $\bar{Q} \cap \bar{V}_1 = \emptyset$.

Пусть $B := B_R(0)$ – шар достаточно большого радиуса R такой, что $\bar{Q}, \bar{V}_1 \subset B$. Пусть $V_2 = Q$. Определим также области $V_3 := B \setminus (\bar{V}_1 \cup \bar{V}_2)$ с границей $\partial V_3 = \partial B \cup \partial V_1 \cup \partial V_2$ и $V_4 = \bar{B}^c$.

Рассматриваемую краевую задачу для рассеянного поля сведем к задаче сопряжения в областях V_l (ниже приняты обозначения $\mathbf{E}_l, \mathbf{H}_l$ для $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$ в V_l):

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}_l = -i\omega\epsilon_e \mathbf{E}_l, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_l = i\omega\mu_e \mathbf{H}_l, \end{cases} \quad l = 1, 3, 4; \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}_2 = -i\omega\hat{\epsilon} \mathbf{E}_2, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_2 = i\omega\mu_e \mathbf{H}_2, \end{cases}$$

$$\mathbf{E}_{2,\tau}|_{\partial Q} = \mathbf{E}_{3,\tau}|_{\partial Q}; \quad \mathbf{H}_{2,\tau}|_{\partial Q} = \mathbf{H}_{3,\tau}|_{\partial Q}; \quad \mathbf{E}_{3,\tau}|_{\partial B} = \mathbf{E}_{4,\tau}|_{\partial B}; \quad \mathbf{H}_{3,\tau}|_{\partial B} = \mathbf{H}_{4,\tau}|_{\partial B};$$

$$\mathbf{E}_{1,\tau}|_{\partial V_1 \setminus \bar{\Omega}} = \mathbf{E}_{3,\tau}|_{\partial V_1 \setminus \bar{\Omega}}; \quad \mathbf{H}_{1,\tau}|_{\partial V_1 \setminus \bar{\Omega}} = \mathbf{H}_{3,\tau}|_{\partial V_1 \setminus \bar{\Omega}}; \quad \mathbf{E}_{1,\tau}|_{\Omega} = \mathbf{E}_{3,\tau}|_{\Omega} = 0.$$

Условия излучения Зоммерфельда заменим эквивалентными условиями Сильвера – Мюллера [5]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_4, \mathbf{H}_4 &= o(1/r), & \operatorname{Im} k > 0, \\ \mathbf{H}_4 \times \mathbf{e}_r - \mathbf{E}_4 &= o(1/r), & \mathbf{E}_4 \times \mathbf{e}_r - \mathbf{H}_4 = o(1/r) \quad r \rightarrow \infty, \\ \mathbf{E}_4, \mathbf{H}_4 &= O(1/r), & \operatorname{Im} k = 0. \end{aligned}$$

Применим лемму Лоренца

$$\int_{\partial V} (\mathbf{E}' \times \mathbf{H}'' - \mathbf{E}'' \times \mathbf{H}', \mathbf{n}) ds = \int_V (\mathbf{j}_H'', \bar{\mathbf{H}}') + (\mathbf{j}_E', \bar{\mathbf{E}}'') - (\mathbf{j}_H', \bar{\mathbf{H}}'') - (\mathbf{j}_E'', \bar{\mathbf{E}}') dV$$

в ограниченных областях V_1, V_2 и V_3 .

Опишем подробно эту процедуру для неоднородной области $V_2 = Q$. Наряду с исходной системой уравнений Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}_2 = -i\omega\hat{\epsilon} \mathbf{E}_2, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_2 = i\omega\mu_e \mathbf{H}_2 \end{cases}$$

рассмотрим еще систему уравнений для комплексно-сопряженного поля $\bar{\mathbf{E}}_2, \bar{\mathbf{H}}_2$:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \bar{\mathbf{H}}_2 = i\omega\hat{\epsilon} \bar{\mathbf{E}}_2, \\ \operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}}_2 = -i\omega\mu_e \bar{\mathbf{H}}_2. \end{cases}$$

Заменяя $\bar{\mathbf{E}}_2$ на $-\tilde{\mathbf{E}}_2$, получим

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \bar{\mathbf{H}}_2 = -i\omega\tilde{\mathbf{E}}_2 = -i\omega\tilde{\mathbf{E}}_2 + i\omega(\tilde{\mathbf{E}} - \bar{\mathbf{E}})\tilde{\mathbf{E}}_2, \\ \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}}_2 = i\omega\bar{\mu}_e \bar{\mathbf{H}}_2 = i\omega\mu_e \bar{\mathbf{H}}_2 - i\omega(\mu_e - \bar{\mu}_e)\bar{\mathbf{H}}_2. \end{cases}$$

Применяя лемму Лоренца к полям $\mathbf{E}' = \mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}' = \mathbf{H}_2$, $\mathbf{E}'' = \tilde{\mathbf{E}}_2$, $\mathbf{H}'' = \bar{\mathbf{H}}_2$ и токам $\mathbf{j}_E'' = i\omega(\tilde{\mathbf{E}} - \bar{\mathbf{E}})\tilde{\mathbf{E}}_2$, $\mathbf{j}_H'' = i\omega(\mu_e - \bar{\mu}_e)\bar{\mathbf{H}}_2$, получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial Q} (\mathbf{E}_2 \times \bar{\mathbf{H}}_2 - \tilde{\mathbf{E}}_2 \times \mathbf{H}_2, \mathbf{n}) ds = \\ & = - \int_Q i\omega(\tilde{\mathbf{E}} - \bar{\mathbf{E}})\tilde{\mathbf{E}}_2, \bar{\mathbf{E}}_2 dv + \int_Q i\omega(\mu_e - \bar{\mu}_e)\bar{\mathbf{H}}_2, \bar{\mathbf{H}}_2 dv. \end{aligned}$$

Заменяя теперь $\tilde{\mathbf{E}}_2$ на $-\bar{\mathbf{E}}_2$ и учитывая свойства сред, получим

$$\int_{\partial Q} (\mathbf{E}_2 \times \bar{\mathbf{H}}_2 + \bar{\mathbf{E}}_2 \times \mathbf{H}_2, \mathbf{n}) ds = \int_Q i\omega(\tilde{\mathbf{E}} - \bar{\mathbf{E}})\bar{\mathbf{E}}_2, \bar{\mathbf{E}}_2 dv. \quad (7)$$

В ограниченных областях V_1 и V_3 получаются аналогичные соотношения:

$$\int_{\partial V_1 \setminus \bar{\Omega}} (\mathbf{E}_1 \times \bar{\mathbf{H}}_1 + \bar{\mathbf{E}}_1 \times \mathbf{H}_1, \mathbf{n}) ds = \int_V i\omega(\epsilon_e - \bar{\epsilon}_e)\bar{\mathbf{E}}_1, \bar{\mathbf{E}}_1 dv, \quad (8)$$

$$\int_{\partial Q \cup \partial V_1 \setminus \bar{\Omega} \cup \partial B} (\mathbf{E}_3 \times \bar{\mathbf{H}}_3 + \bar{\mathbf{E}}_3 \times \mathbf{H}_3, \mathbf{n}) ds = \int_{V_3} i\omega((\epsilon_e - \bar{\epsilon}_e)\bar{\mathbf{E}}_3, \bar{\mathbf{E}}_3) dv. \quad (9)$$

Из условий излучения получим

$$\begin{aligned} & \int_{\partial B} (\mathbf{E}_3 \times \bar{\mathbf{H}}_3 + \overline{\mathbf{E}_3 \times \bar{\mathbf{H}}_3}, \mathbf{n}) ds = 2 \operatorname{Re} \int_{\partial B} (\mathbf{E}_3 \times \bar{\mathbf{H}}_3, \mathbf{n}) ds = \\ & = 2 \operatorname{Re} \int_{\partial B} ((\mathbf{H}_3 \times \mathbf{n} + o(1/r)) \times \bar{\mathbf{H}}_3, \mathbf{n}) ds = 2 \operatorname{Re} \int_{\partial B} ((\mathbf{H}_3 \times \mathbf{n}) \times \bar{\mathbf{H}}_3, \mathbf{n}) ds + o(1) = \\ & = 2 \operatorname{Re} \int_{\partial B} (\mathbf{H}_3 \times \mathbf{n}, \bar{\mathbf{H}}_3 \times \mathbf{n}) ds + o(1) = 2 \int_{\partial B} |\mathbf{H}_3 \times \mathbf{n}|^2 ds + o(1) = 2 \int_{\partial B} |\mathbf{H}_{3,\tau}|^2 ds + o(1). \end{aligned}$$

Сложим равенства (7), (8) и (9):

$$2 \int_{\partial B} |\mathbf{H}_{3,\tau}|^2 ds + \int_Q (\operatorname{Im} \tilde{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{E}}_2, \bar{\mathbf{E}}_2) dv + \sum_{l=1,3} \int_{V_l} (\operatorname{Im} \epsilon_e \bar{\mathbf{E}}_l, \bar{\mathbf{E}}_l) dv = o(1), \quad (10)$$

и рассмотрим несколько случаев.

Пусть сначала $\operatorname{Im} \tilde{\mathbf{E}} > 0$ всюду в $\bar{\Omega}^c$. Из условий излучения и (10) следует сразу, что $\mathbf{E}, \mathbf{H} \equiv 0$ во всем пространстве.

Если $\text{Im} \hat{\epsilon}(x) > 0$ в Q и $\text{Im} \epsilon_e = 0$ в свободном пространстве, то

$$2 \int_{\partial B} |\mathbf{H}_{3,\tau}|^2 ds + \int_Q (\text{Im} \hat{\epsilon} \bar{\mathbf{E}}_2, \bar{\mathbf{E}}_2) dv = o(1).$$

Так как оба слагаемых здесь неотрицательны, то

$$\int_{\partial B} |\mathbf{H}_{3,\tau}|^2 ds = o(1), R \rightarrow \infty; \quad \int_Q (\text{Im} \hat{\epsilon} \bar{\mathbf{E}}_2, \bar{\mathbf{E}}_2) dv = 0.$$

В силу леммы Реллиха из первого равенства заключаем, что $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s \equiv 0$ вне рассеивателей; из второго равенства следует $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2 \equiv 0$ в Q .

Наконец, если диэлектрическая проницаемость всюду вещественна и положительна в $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$, снова из леммы Реллиха получаем $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s \equiv 0$ вне рассеивателей; равенство $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2 \equiv 0$ в Q также сохраняется [6]. Доказательство завершено.

2. Интегродифференциальные уравнения задачи дифракции

Рассмотренная краевая задача сводится к операторному уравнению

$$\hat{L}(\mathbf{J}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}. \quad (11)$$

Здесь $\mathbf{J} = \left[\frac{\hat{\epsilon}(x)}{\epsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}$ – неизвестный вектор тока поляризации в Q ;

$\mathbf{u}$ – неизвестная поверхностная плотность тока, представляющая собой касательное к Ω векторное поле. Правая часть есть вектор $\mathbf{f} = (\mathbf{E}_{0,Q}, \mathbf{E}_{0,\tau})$, где $\mathbf{E}_{0,Q}$ – сужение падающего поля Q , а $\mathbf{E}_{0,\tau}$ – его касательная составляющая на экране.

Матричный оператор $\hat{L}$ имеет вид

$$\hat{L} = \hat{L}_1 + \hat{L}_2 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & K_1 \\ K_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь операторы A, S, K_i определяются равенствами

$$A\mathbf{J} := \hat{\xi}\mathbf{J}(x) - (k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy,$$

$$S\mathbf{u} := \left(-(k_e^2 + \text{grad div}) \int_{\Omega} G(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y \right)_{\tau},$$

$$K_1\mathbf{u} := -(k_e^2 + \text{grad div}) \int_{\Omega} G(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y,$$

$$K_2\mathbf{J} := \left(-(k_e^2 + \text{grad div}) \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy \right)_{\tau}$$

и рассматриваются как отображения в следующих пространствах:

$$\begin{aligned} A\mathbf{J} &:= L_2(Q) \rightarrow L_2(Q), & S\mathbf{u} &:= W(\Omega) \rightarrow W'(\Omega), \\ K_1\mathbf{u} &:= W(\Omega) \rightarrow L_2(Q), & K_2\mathbf{J} &:= L_2(Q) \rightarrow W'(\Omega). \end{aligned}$$

Пространство $W = W(\bar{\Omega})$ сечений векторных расслоений было введено в монографии [4] как замыкание пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_W$:

$$\|\mathbf{u}\|_W^2 = \|\mathbf{u}\|_{-1/2}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{-1/2}^2.$$

Здесь $\|\mathbf{u}\|_{-1/2}^2$ обозначает норму в пространстве Соболева $H^{-1/2}(\Omega)$, пространство $W' = W'(S)$ – антидвойственное к W .

Решение уравнения (11) – пара $(\mathbf{J}, \mathbf{u}) \in L_2(Q) \times W(\Omega)$.

Теорема 2. В выбранных пространствах оператор $\hat{L}$ является фредгольмовым оператором с нулевым индексом.

Доказательство. В силу ограничений, наложенных на тензор диэлектрической проницаемости, оператор $\hat{A}$ является фредгольмовым в $L_2(Q)$ [7]. Оператор $S: W(\Omega) \rightarrow W'(\Omega)$ фредгольмов, так как всюду вне экрана выполнено условие $k_e \neq 0$ [4]. Следовательно, $\hat{L}_1$ – фредгольмов. Оператор $\hat{L}_2$ компактен, так как тело и экран не пересекаются и, следовательно, ядра обоих операторов K_1 и K_2 являются бесконечно дифференцируемыми. Таким образом, $\hat{L} = \hat{L}_1 + \hat{L}_2$ – фредгольмов оператор в выбранных пространствах. Теорема доказана.

Покажем теперь, что решение системы (11) является гладким. По предположению $\operatorname{supp}(\mathbf{j}_{0,E}) \cap (\bar{\Omega} \cup \bar{Q}) = \emptyset$, следовательно, $\mathbf{E}_{0,Q} \in C^\infty(\bar{Q})$ и $\mathbf{E}_{0,\tau} \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Из эллиптичности оператора $A: H_{comp}^s(Q) \rightarrow H_{loc}^s(Q)$ (см. [7]) и гладкости $K_1\mathbf{u}$ в $\bar{Q}$ (так как $\bar{\Omega} \cap \bar{Q} = \emptyset$) следует, что $\mathbf{J} \in C^\infty(Q)$. Аналогично, эллиптичность оператора S [4] влечет гладкость $\mathbf{u}$ в Ω . Таким образом, верно

Утверждение. Если решение $(\mathbf{J}, \mathbf{u}) \in L_2(Q) \times W(\Omega)$ системы (11) существует, то $\mathbf{J}$ и $\mathbf{u}$ бесконечно дифференцируемы во внутренних точках Q и Ω соответственно.

Список литературы

1. **Максимова, М. А.** Численное решение задачи дифракции электромагнитных волн на системе тел и экранов / М. А. Максимова, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 3 (31). – С. 114–133.
2. **Медведик, М. Ю.** Скалярная задача дифракции плоской волны на системе непересекающихся экранов и неоднородных тел / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54, № 8. – С. 1319–1331.
3. **Самохин, А. Б.** Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии / А. Б. Самохин. – М.: Радио и связь, 1998. – 160 с.

4. **Ильинский, А. С.** Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах / А. С. Ильинский, Ю. Г. Смирнов. – М. : Радиотехника, 1996. – 176 с.
5. **Ильинский, А. С.** Математические модели электродинамики / А. С. Ильинский, В. В. Кравцов, А. Г. Свешников. – М. : Высшая школа, 1991. – 224 с.
6. **Costabel, M.** Volume and surface integral equations for electromagnetic scattering by a dielectric body / M. Costabel, E. Darrigrand, E. Kone // *J. Comput. Appl. Math.* – 2010. – № 234. – P. 1817–1825.
7. **Валовик Д. В.** Метод псевдодифференциальных операторов в задаче дифракции электромагнитной волны на диэлектрическом теле / Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов // *Дифференциальные уравнения.* – 2012. – Т. 48, № 4. – С. 509–515.

References

1. Maksimova M. A., Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G., Tsupak A. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2014, no. 3 (31), pp. 114–133.
2. Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G., Tsupak A. A. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Journal of calculus mathematics and mathematical physics]. 2014, vol. 54, no. 8, pp. 1319–1331.
3. Samokhin A. B. *Integral'nye uravneniya i iteratsionnye metody v elektromagnitnom rasseyanii* [Integral equations and iteration methods in magnetic scattering]. Moscow: Radio i svyaz', 1998, 160 p.
4. Il'inskiy A. S., Smirnov Yu. G. *Difraktsiya elektromagnitnykh voln na provodyashchikh tonkikh ekranakh* [Diffraction of electromagnetic waves on conductive thin screens]. Moscow: Radiotekhnika, 1996, 176 p.
5. Il'inskiy A. S., Kravtsov V. V., Sveshnikov A. G. *Matematicheskie modeli elektrodinamiki* [Mathematical models of electrodynamics]. Moscow: Vysshaya shkola, 1991, 224 p.
6. Costabel M., Darrigrand E., Kone E. *J. Comput. Appl. Math.* 2010, no. 234, pp. 1817–1825.
7. Valovik D. V., Smirnov Yu. G. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations]. 2012, vol. 48, no. 4, pp. 509–515.

Валовик Дмитрий Викторович

доктор физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: dvalovik@mail.ru

Valovik Dmitriy Viktorovich

Doctor of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling, Penza
State University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

Медведик Михаил Юрьевич

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: _medv@mail.ru

Medvedik Mikhail Yur'evich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling, Penza
State University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

Смирнов Юрий Геннадьевич

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
математики и суперкомпьютерного
моделирования, Пензенский
государственный университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Smirnov Yuriy Gennad'evich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of sub-department
of mathematics and supercomputer
modeling, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Цупак Алексей Александрович

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: altsupak@yandex.ru

Tsupak Aleksey Aleksandrovich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling, Penza
State University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

УДК 517.968, 517.983.37, 517.958:535.4

Валовик, Д. В.

Существование и единственность решения задачи дифракции электромагнитной волны на системе непересекающихся тел и экранов /
Д. В. Валовик, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Известия
высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические
науки. – 2015. – № 1 (33). – С. 89–97.